Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φροντιστηρ. ασκήσεις #7-8, Ιαν. 2015, Θέμα: Επαναληπτικές

1. Να υπολογίσετε, με χρήση οριζουσών, για ποιές τιμές των a, b η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a+2 \\ a & 3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

είναι 2.

2. Για τον ακόλουθο πραγματικό πίνακα A να υπολογίσετε μια βάση του χώρου γραμμών, μια βάση του χώρου στηλών, καθώς και τις αντίστοιχες διαστάσεις

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$x + ty - z = t$$

$$x - y - z = 3$$

$$x + y - tz = 1$$

όπου $t \in \mathbb{R}$.

5. Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το γραμμικό σύστημα

$$x - 4y + az = a + b$$

$$ax + y + z = 4$$

$$x - y + z = b$$

i) να έχει μοναδική λύση, *ii*) να μην έχει λύση, *iii*) να έχει άπειρες λύσεις.

6. Στον $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τους υποχώρους του

$$V = \{(x, y, z, w) | x - y + z - w = 0\}$$

$$W =< (1, 2, 4, 8), (1, 1, 1, 1), (3, 5, 9, 17) > .$$

Να προσδιοριστούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V \cap W$ και $V + W$. Βρείτε υποχώρους V', W' τέτοιους ώστε $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$ και $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$.

7. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$$

που ορίζεται απο τη σχέση

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} 2f'(0) & f(1) \\ f''(2) & 0 \end{pmatrix} \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}_2[x].$$

(α') Να δείξετε ότι η T είναι γραμμική.

(β') Να βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της T.

(γ') Είναι η T ένα προς ένα; Είναι η T επί;

8. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(x, y, z) = (y, z, -x - y - z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Είναι η T αντιστρέψιμη; Αν ναι, να υπολογίσετε την T^{-1}.

9. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$T(x, y, z) = (\frac{19}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{13}{4}z, \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{11}{4}z, 3x + y - 4z) \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(α') Να βρείτε τον πίναχα A της T στη βάση α$= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

(β') Να βρείτε τον πίναχα B της T στη βάση $\{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

10. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$. Αν μια βάση του πυρήνα της T είναι η $\{x_1, \ldots, x_s\}$, μια βάση της εικόνας της T είναι η $\{y_1, \ldots, y_r\}$, και τα διανύσματα $\{z_1, \ldots, z_r\}$ του V έχουν την ιδιότητα $T(z_i) = y_i$, $1 \le i \le r$, τότε δείξτε ότι το σύνολο $\{x_1, \ldots, x_s, z_1, \ldots, z_r\}$ αποτελεί βάση του V.

11. Έστω A και B δύο $n \times n$ πίναχες πραγματικών αριθμών και έστω $adj(A)$ και $adj(B)$ οι προσαρτημένοι πίναχες των A, B αντίστοιχα. Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι, να δείξετε ότι και ο πίναχας $adj(AB)$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει

$$(adj(AB))^{-1} = adj(A)^{-1} adj(B)^{-1}.$$

12. Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίναχες πραγματικών αριθμών τέτοιοι ώστε $A^t = A^{-1}$, $B^t = B^{-1}$ και οι πίναχες $A + B$, $A - B$ είναι αντιστρέψιμοι. Να δείξετε ότι και ο πίναχας $A^t B - B^t A$ είναι αντιστρέψιμος.